10.14 ENGRANAJES PARA EJES ALABEADOS:

Nos referimos a ruedas dentadas que transmiten movimiento entre ejes que ni **se cortan ni son paralelos, (se** denominan **ejes** alabeados), la posición de estos ejes es invariable, y mantienen constante la relación de velocidades angulares.
Por lo general, los ejes de los árboles que se **cruzan** en el espacio y sus ruedas dentadas forman **engranajes hiperboloides.** En la práctica se emplean los siguientes tipos particulares de engranajes hiperboloides:

ENGRANAJES HELICOIDALES CRUZADOS. (Ver figura 10-27)
También llamados engranajes espirales, son similares en apariencia a los engranajes helicoidales para ejes paralelos convencionales. Tienen poca capacidad de carga debido a que el área de contacto es muy reducida. Usados principalmente, para construir mandos de velocidad variable en los que la distancia entre centros y el tamaño de los engranajes es fijo.

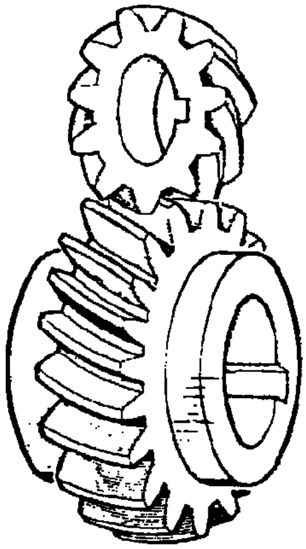


Figura 10-27

ENGRANAJES HIPOIDALES. (Ver figura 10-28)
Similares a los engranajes cónicos de dientes helicoidales, salvo que en este caso los ejes de los engranajes no se cortan. Además, de ser más resistentes y de operar más silenciosa y suavemente. Dado que sus ejes no se cortan, se pueden montar en ejes con soportes en ambos extremos, aumentando la rigidez y precisión del montaje. Los ejes se colocan normalmente a 90º, pero pueden emplearse con cualquier ángulo.

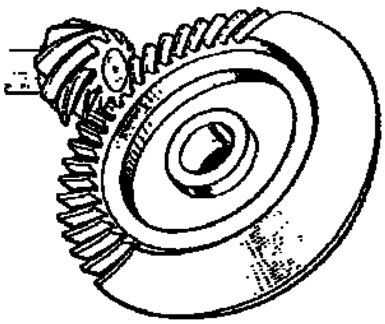


Figura 10-28

ENGRANAJES ESPIROIDALES. (Ver figura 10-29)
Desarrollado por la Compañía Spiroid D.N., este tipo de engrane usa un piñón cónico que se acopla con una corona. Ofrece un gran área de contacto entre los dientes por lo que pueden transmitir cargas muy grandes.

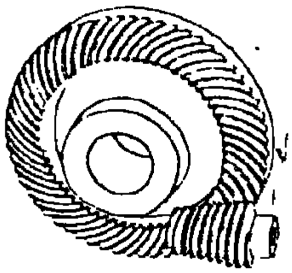


Figura 10-29

ENGRANAJES DE TORNILLO SINFIN RUEDA HELICOIDAL. (Ver figura 10-30)
Ofrecen la mayor relación de transmisión que es posible obtener para una distancia entre centros dada. Operan suave y silenciosamente. Se emplean solo para reducir velocidades. Generalmente, no es posible revertir el movimiento con reducciones mayores de 20:1. Ofrecen una gran área de contacto entre dientes, por lo que pueden transmitir grandes cargas. Su principal desventaja es su bajo rendimiento para transmitir potencia. Sus ejes se colocan generalmente a 90^0, aunque pueden usarse en otros ángulos.

ENGRANAJES DE TORNILLO SINFIN GLOBOIDAL RUEDA HELICOIDAL GLOBOIDE. (Ver figura 10-31)
Se distinguen de las anteriores (con tornillo sinfín cilíndrico) por la forma de la parte fileteada del tornillo que representa una superficie globoidal que abraza la rueda con un cierto arco. Se emplean en el accionamiento de ascensores y montacargas. Se usan para la misma gama de potencias y relaciones de transmisión de los anteriores. Tienen considerable menor tamaño. Como desventajas, podemos decir, lubricación artificial por tener poca superficie de disipación, montajes más exactos, fabricación más compleja.

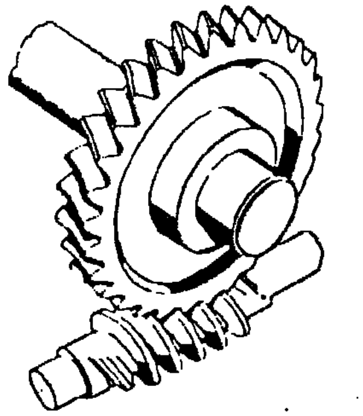


Figura 10-30

10.15 DETERMINACICN DE LAS SUPERFICIES PRIMITIVAS

Dos cuerpos **A_1 y A_2** giran con velocidades angulares ϖ_1 y ϖ_2 alrededor de los ejes alabeados x_1 y x_2, en posición relativa invariable, (ver figura 10-32), manteniendo constante la relación de transmisión:

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = cte$$

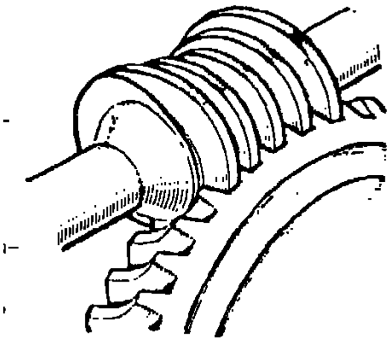


Figura 10 31

El movimiento relativo (A_2/A_1), puede obtenerse por la rotación de una de las superficies o axoides del movimiento relativo, sobre la otra. Las superficies primitivas o axoides del movimiento relativo, se obtienen como lugar geométrico de las sucesivas posiciones que Ocupa respecto a ambos cuerpos, el eje central del sistema de vectores que define el movimiento relativo:

$$\left(A_2/A_1\right) = \left(A_2/B\right) + \left(B/A_1\right)$$

B: representa el bastidor fijo sobre el cual se encuentran montados los ejes del movimiento.

Vamos a determinar la posición del eje central:
ϖ_2 sobre x_2 y ($-\varpi_1$) sobre $x_1$definen el movimiento relativo (A_2/A_1). Como ya hemos visto el procedimiento consiste en invertir el movimiento, agregándole a los elementos la velocidad angular $-\varpi_1$. El cuerpo **A_1** será ahora inmóvil y el cuerpo **A_2** girará con una velocidad angular:

$$\boxed{\varpi_{2-1} = \varpi_2 - \varpi_1 \rightarrow Ec. \quad 10.35}$$

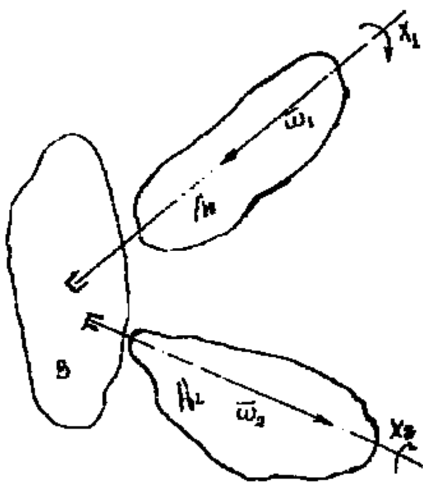
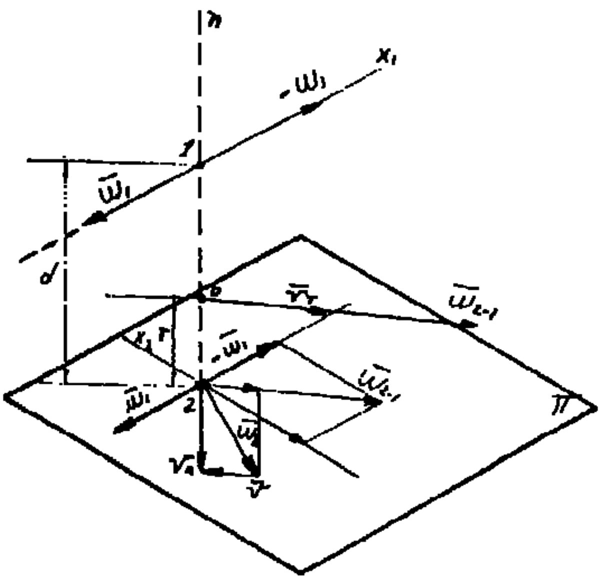


Figura 10-32

Es decir, el movimiento del cuerpo A_2 se compone de un giro alrededor del eje x_1 con velocidad angular $-\varpi_1$ y un giro alrededor del eje x_2, con una velocidad angular ϖ_2 .Veamos esto en detalle, ver figura 10—33

La recta n, es normal común a ambos vectores a los que intercepta en los puntos 1 y 2**; d** es la mínima distancia entre los vectores. Si agregamos el par de vectores ϖ_1 y ($-\varpi_1$) aplicados en el punto 2; no se modifican las condiciones, y el sistema se transforma en otro equivalente.



La composición de los vectores ϖ_2 y ($-\varpi_1$) aplicado en 2, da un vector rotación: $\varpi_{2-1} = \varpi_2 - \varpi_1$ aplicado en 2. La cupla de rotaciones: ϖ_1 (aplicado en 2) y $-\varpi_1$ aplicado en 1) es equivalente a una traslación normal al plano de la cupla y de magnitud: $v = \varpi_1 \cdot d$

La traslación v es indudablemente de dirección paralela al plano π definido por los vectores ϖ_2 y $-\varpi_1$ aplicados en 2 (y por lo tanto a ϖ_{2-1}) por que es normal a la recta n (contenida en el plano de la cupla) y ésta normal común a las direcciones x_1 y x_2.

$\bar{v}$ Puede descomponerse en dos traslaciones; una normal ϖ_{2-1} ($\bar{v}_n$), y una

Figura 10-33

paralela ϖ_{2-1} ($\bar{v}_n$). La componente $\bar{v}_n$ es equivalente a una cupla de rotaciones en un plano normal a su dirección que puede componerse con ϖ_{2-1} resultando de la composición que todo sucede como si ϖ_{2-1} se hubiera trasladado a una distancia r norma al plano (π). Ver figura 10-34.

Tal que: $v_n = \omega_{2-1} \cdot r$

El movimiento relativo definido por ϖ_2 (x_2) y $-\varpi_1$ (x_1) puede reducirse entonces, a una traslación $\bar{v}_T$ y una rotación ϖ_{2-1} en torno de un eje paralelo a $\bar{v}_T$ a una distancia r de x_2 sobre la normal común n. Tal eje de rotación coincide con el **eje central** y

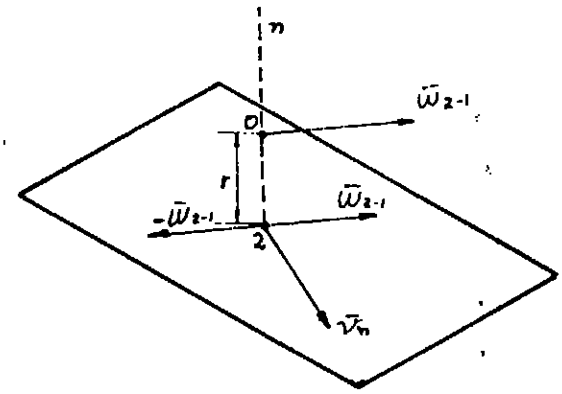


Figura 10-34

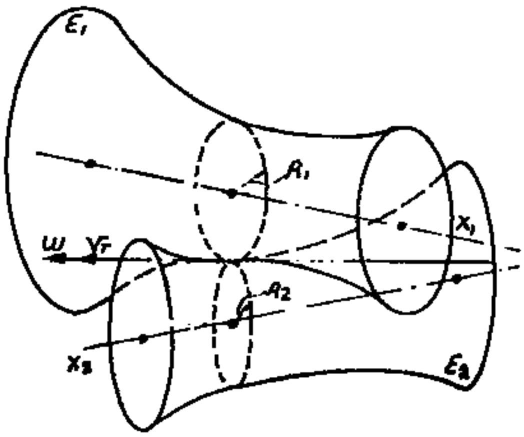


Figura 10-35

del sistema de vectores ϖ_2 (x_2) y $-\varpi_1$ (x_1).

De esto podemos decir que: “Si x_1 y x_2 **son gausos** o alabeados, el movimiento **relativo es rototraslatorio”.** (Ver teorema de Chasles en Mecánica).

Si se hace girar alrededor del eje x_1 el eje instantáneo y, entonces este eje describe en el espacio una superficie reglada de revolución de hiperboloide; otro **hiperboloide** se obtiene cuando el eje y gira alrededor de x_2. Los hiperboloides obtenidos de este modo, los denominaremos **hiperboloides primitivos.** Los hiperboloides se contactan en el eje y, es decir, por una línea recta. Al girar alrededor de los ejes x_1 y x_2, los hiperboloides ruedan uno sobre otro y se deslizan el uno respecto al otro. Ver figura 10-35

En consecuencia, las superficies primitivas del movimiento, o bien, los axoides ξ_1 y ξ_2, se reducen a dos hiperboloides reglados de revolución que tienen en cada instante una generatriz común. Por lo que, el movimiento relativo **(A_2/A_1)** puede obtenerse por el rodamiento de un hiperboloide sobre el otro pero acompañado de un movimiento de deslizamiento en la dirección de la generatriz de contacto expresado en cada instante por $\bar{v}_T$.

El eje de rotación instantáneo posee la propiedad de que el deslizamiento a lo largo de éste es el menor de todos los posibles. De lo anterior se podría haber deducido, que los dientes de las ruedas se deben colocar cerca de las superficies de los hiperboloides. Además, no se necesita conservar con exactitud la superficie de los hiperboloides; éstas pueden reemplazarse por superficies cilíndricas que se consideren convenientes, si para las ruedas son elegidas zonas de un ancho b en los lugares más angostos de los hiperboloides, o por superficies cónicas, si las zonas para las ruedas son elegidas en otros lugares de las mismas. Ver figura 10-36

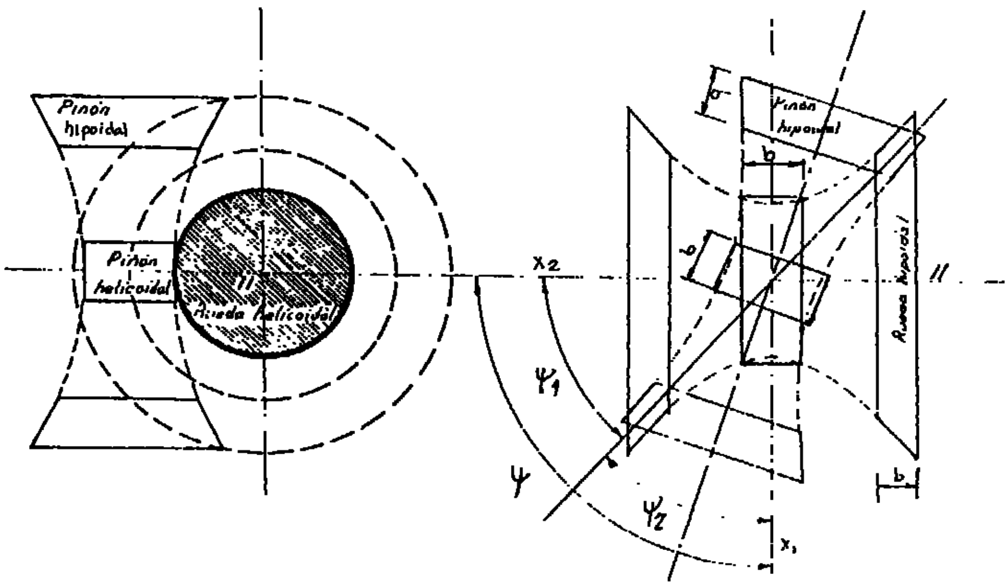


Figura 10-36

Sin embargo, al determinar el rendimiento de las transmisiones de hiperboloide, se revela que situar los dientes cerca de la superficie del hiperboloide, en caso general, no es conveniente. Esto se explica por que, aunque la velocidad de deslizamiento realmente aquí es menor, la fuerza de presión sobre el diente es tal, que la potencia gastada en vencer el rozamiento, la cual es proporcional al producto de las fuerzas de presión por la velocidad de deslizamiento, no es la menor.

Por eso, aunque los dientes de las ruedas se colocan alrededor de las superficies cónicas o cilíndricas, estas superficies pueden estar situadas a una distancia considerable respecto a las hiperboloides correspondientes. El engranaje hiperboloide con ruedas dentadas cilíndricas se denomina engranaje **helicoidal cruzado**, a su vez, el engranaje hiperboloide con ruedas cónicas, se denomina **engranaje hipoide.**

10.16 ENGRANAJES HELICOIDALES ENTRE EJES ALABEADOS

Las ruedas dentadas cilíndricas de engranajes de ejes alabeados se diseñan con dientes oblicuos. Los cilindros primitivos de estas ruedas son las gargantas de los hiperboloides en contacto. Naturalmente los cilindros primitivos no solo ruedan, sino que **se deslizan el uno con respecto al otro.**

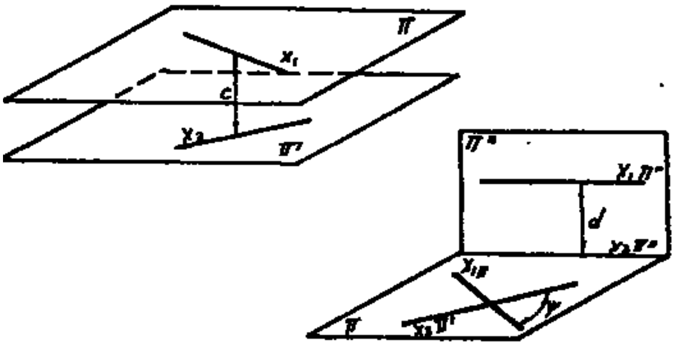


Figura 10-37

Los ejes de los cilindros primitivos x_1 y x_2, se cruzan bajo un ángulo (ψ), el cual en su proyección vertical se ve en su magnitud natural. Es decir, si tenemos dos ejes, en cualquier posición en el espacio, siempre hay entre los infinitos planos que contienen a uno de ellos, uno que es paralelo al otro eje. Ver figura 10—37.

El plano π contiene al eje x_1 y es paralelo al eje x_2, del que está a una distancia d. Las proyecciones de los ejes x_1 y x_2 sobre el plano (π’), forman el ángulo (ψ), mientras que las proyecciones sobre un plano normal a π son paralelas y están a una distancia d una de otra.

En los engranajes hiperboloides se llama al ángulo que forman los ejes gausos por ψ medido sobre el plano (π’) y distancia entre ejes d, medido sobre el plano normal (π’’).

Dos ruedas cilíndricas de dientes helicoidales, para que puedan transmitir el movimiento entre ejes alabeados, deben reunir las siguientes condiciones:

a) **La distancia entre los ejes debe ser igual a la suma de los radios de los cilindros primitivos.**

$$d = R_1 + R_2 \quad (Ec. \quad 10.36)$$

Como cilindros primitivos, se entiende a los que se han tomado a los efectos de su fabricación y que nos definen el módulo del dentado, pero que no son las superficies primitivas, (axoides del movimiento) que son hiperboloides de revolución. Como cilindros primitivos de las ruedas helicoidales son aquellos cuyos diámetros coinciden con los diámetros de las gargantas de los hiperboloides.

b) En el instante del contacto, los dientes de ambas ruedas deben tener la misma dirección.

Si ψ_1 es el ángulo de inclinación de los dientes de la rueda solidaria al eje x_1 y ψ_2 el ángulo de inclinación de los dientes de la rueda solidaria a x_2. Analizando la proyección horizontal, se deduce:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (Ec. \quad 10.37)$$

ψ: Ángulo que forman las direcciones de los ejes x_1y x_2.

c) Para ser factible el engrane, el lleno de una rueda debe corresponder al vacío de la otra, es decir, que los pasos normales sean iguales.

$$P_{n1} = P_{n2} \quad (Ec.\quad 10.38)$$

Las velocidades tangenciales de las circunferencias primitivas en contacto deberán tener la misma componente normal a la dirección de los dientes para que se pueda verificar el engrane. Si $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son las velocidades tangenciales de las primitivas y $\bar{v}_n$ la componente normal a la dirección de los dientes, de la figura 10.38, se deduce:

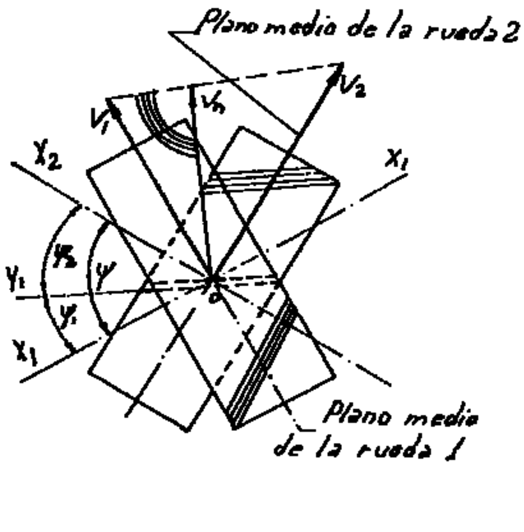


Figura 10-38

$$v_n = v_1 \cdot \cos\psi_1 = v_2 \cdot \cos\psi_2 \quad (Ec.\quad 10.39)$$

La relación de transmisión:

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{v_2 / R_2}{v_1 / R_1} = \frac{R_1 \cdot \cos\psi_1}{R_2 \cdot \cos\psi_2} \quad (Ec.\quad 10.40)$$

La relación de transmisión **i,** no resulta como en el caso de engranajes de ejes paralelos igual a la relación de radios de las circunferencias primitivas; pudiéndose en consecuencia, obtener relaciones $i = 1$**, con radios distintos.**
De otra manera, debiéndose verificar que los **pasos normales de ambas ruedas** son iguales, puede expresarse:

$$2 \cdot \pi \cdot R_1 = Z_1 \cdot P_1 = Z_1 \cdot \frac{P_{n1}}{\cos\psi_1} \therefore P_{n1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_1 \cdot \cos\psi_1}{Z_1} \quad (Ec.\quad 10.41)$$

$$2 \cdot \pi \cdot R_2 = Z_2 \cdot P_2 = Z_2 \cdot \frac{P_{n2}}{\cos\psi_2} \therefore P_{n2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_2 \cdot \cos\psi_2}{Z_2} \quad (Ec.\quad 10.42)$$

Igualando 10.41 con 10.42, tenemos:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot R_1 \cdot \cos\psi_1}{Z_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_2 \cdot \cos\psi_2}{Z_2}$$

$$i = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_2 \cdot \cos\psi_2}{R_1 \cdot \cos\psi_1} \quad (Ec.\quad 10.43)$$

La dirección del eje central y, se obtiene trazando la perpendicular a v_n. Los dientes de ambas ruedas deben ser tangentes a la dirección de la velocidad de deslizamiento.
Las ruedas helicoidales para ejes alabeados, esencialmente, son engranajes de contacto puntual.
Los dientes de estos engranajes tienen un punto de contacto con el conjugado, que se va transformando en una línea de contacto a medida que las ruedas se desgastan. Por esta razón, deben transmitir solamente cargas muy pequeñas. Sin embargo, por ser de contacto puntual,

no necesitan montarse con gran precisión y efectivamente, pueden variarse ligeramente, sin afectar la relación de contacto, ni la distancia entre centros ni el ángulo entre los ejes.
La diferencia entre las ruedas helicoidales de ejes paralelos y las de ejes que se cruzan, no aparece hasta que se montan engranando con otra. Se fabrican exactamente de la misma forma. Un par de ruedas engranando **en ejes que se cruzan tienen la inclinación de la hélice en el mismo sentido; esto es, sí la rueda conductora tiene dientes inclinados a la derecha, mueve a la conducida que tiene dientes inclinados también a la derecha.**
Para especificar el tamaño de los dientes se emplea siempre el módulo normal m_n. La razón de ello es que los módulos circunferenciales no son los mismos cuando se utilizan distintos ángulos de inclinación de los clientes en la rueda motora y conducida.